

УДК 551.515

## ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ВИХРЬ КАК КЛИМАТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АТМОСФЕРЫ

© 1997 г. М. В. Курганский, И. А. Писниченко

Представлено академиком Г.С. Голицыным 16.09.96 г.

Поступило 19.09.96 г.

Предложен метод нахождения оптимальной для климатических задач нормировочной функции в общем определении потенциального вихря Эртеля. Метод основан на отыскании минимума разности информационных энтропий фактической плотности распределения массы воздуха по значениям потенциального вихря и отвечающей ей равновесной (больцмановской) плотности распределения. Эффективность метода иллюстрируется числовыми примерами.

1. А.М. Обуховым [1] указано, что уравнение трансформации потенциального вихря Эртеля  $I_\vartheta = (\omega_a \cdot \nabla \vartheta) / \rho$ , где  $\omega_a$  – абсолютный вихрь скорости,  $\vartheta$  – потенциальная температура,  $\rho$  – плотность, может быть записано в виде

$$\frac{dI_\vartheta}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \omega_a + \vartheta \operatorname{rot} \mathbf{F} \right). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  – непотенциальные силы (включая силу вязкости),  $\frac{d}{dt}$  – символ индивидуальной производной, причем  $\frac{d\vartheta}{dt}$  определяется полем притоков тепла. В [1] отмечена возможность компенсации поля внешних воздействий, когда вектор

$$\mathbf{N}_\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt} \omega_a + \vartheta \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

соленоидален, и предположено, что это может осуществляться для некоторого среднего режима атмосферной циркуляции. При этом  $\frac{dI_\vartheta}{dt} \approx 0$ .

2. В силу известной “калибровочной инвариантности”, заложенной в формулировку вихревой теоремы Эртеля [2] (см., например, [3, 4]), переменная  $\vartheta$  в определении потенциального вихря может быть замещена произвольной гладкой функцией  $\chi(\vartheta)$  (считается, что это монотонно

возрастающая функция своего аргумента). Функцию  $\frac{d\chi}{d\vartheta}$  назовем нормировочной. Для адиабатического инварианта  $I_\chi = (\omega_a \cdot \nabla \chi) / \rho$  справедливо тождественное (1) уравнение с точностью до замены  $\vartheta \rightarrow \chi(\vartheta)$ , когда

$$\mathbf{N}_\vartheta \rightarrow \mathbf{N}_\chi = \frac{d\chi}{dt} \omega_a + \chi \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

Важно, что из условия  $\operatorname{div} \mathbf{N}_\vartheta = 0$  не следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{N}_\chi = 0$ . Можно предположить, что существует такая функция  $\chi_0(\vartheta)$ , что условие компенсации внешних факторов выполняется в наилучшей мере. Эта функция может быть, например, найдена путем минимизации функционала

$$\Phi\{\chi\} = \iiint (\operatorname{div} \mathbf{N}_\chi)^2 \Gamma_\chi^{-1} \rho^{-1} dV,$$

где интеграл взят по всему объему атмосферы. Функционал  $\Phi\{\chi\}$  построен так, чтобы исключить из рассмотрения зависимость от поля массы. Варьированию подлежит функция  $\chi(\vartheta)$ , а внешние воздействия  $\frac{d\vartheta}{dt}$  и  $\mathbf{F}$  задаются.

3. Альтернативный подход к решению этой задачи основан на рассмотрении статистического распределения  $\mu(I_\chi, t)$  массы воздуха по значениям

потенциального вихря  $I_\chi$ . Если  $\int_0^\infty \mu dI_\chi = 1$  (для

определенности рассматривается северное полушарие Земли, где  $I_\chi \geq 0$ ), то  $\mu$  может трактоваться как плотность вероятности для значений  $I_\chi$  случайной выбранной воздушной частицы [5]. Если доопределить функцию  $\chi(\vartheta)$  условием  $\chi(\vartheta) \rightarrow 0$

при  $\vartheta \rightarrow \infty$ , то первый момент  $Q_\chi = \int_0^\infty I_\chi \mu dI_\chi$  рас-

пределения  $\mu$  становится вполне определенной конечной величиной (следуя [1],  $Q_\chi$  называем вихревым зарядом атмосферы), а фактическое распределение  $\mu$  по значениям информационной

энтропии  $H_\chi = -\int_0^\infty \mu \ln \mu dI_\chi$  близко к равновесному (больцмановскому) распределению

$$\mu_B(I_\chi) = \frac{1}{Q_\chi} \exp\left(-\frac{I_\chi}{Q_\chi}\right),$$

модулем которого служит  $Q_\chi$  [6]. Для конкретных расчетов в [6] использованы поля потенциального вихря, подсчитанные в [7, 8] по данным ПГЭП 1978–1979 гг. Полагалось, что  $\chi(\vartheta) = -p^*(\vartheta)/g$ , где  $p^*(\vartheta)$  – стандартное распределение давления на изэнтропических поверхностях и  $g$  – ускорение свободного падения.

4. Близость  $\mu$  и  $\mu_B$  оправдывает привлечение к рассмотрению модельного кинетического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mu(I_\chi, t) + \frac{\partial}{\partial I_\chi} \left( \frac{DI_\chi}{Dt} \mu(I_\chi, t) \right) = \\ = \frac{1}{\tau} (\mu_B(I_\chi, t) - \mu(I_\chi, t)), \end{aligned} \quad (2)$$

которое взято в форме Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [9]. К этому уравнению можно прийти, исходя из уравнения неразрывности, записанного в системе координат, где  $I_\chi$  играет роль широты. Поверхности  $I_\chi = \text{const}$  разбивают атмосферу на трубки, по которым производится интегрирование. Из поля  $\frac{dI_\chi}{dt}$  явно выделяется компонента

$\frac{DI_\chi}{Dt} = f(I_\chi, t)$ , где  $f$  определяет крупномасштабное поле источников потенциального вихря, а пульсационная часть  $\frac{dI_\chi}{dt}$  трактуется как бинарные “неадиабатические столкновения” индивидуальных воздушных масс, которые происходят в среднем через промежуток времени  $\tau$  (около недели) и сопровождаются обменом потенциальной завихренностью.

5. В квазистационарном приближении

$$\frac{d(f\mu)}{dI_\chi} = \frac{\mu_B - \mu}{\tau}. \quad (3)$$

Решаем (3) методом теории возмущений  $\mu = \mu_B + v$ , предполагая выполнение условий

$$\int_0^\infty v dI_\chi = 0, \quad \int_0^\infty I_\chi v dI_\chi = 0,$$

вытекающих из сохранения массы и вихревого заряда атмосферы. Тогда

$$v \approx -\tau \frac{d(f\mu_B)}{dI_\chi}, \quad (4)$$

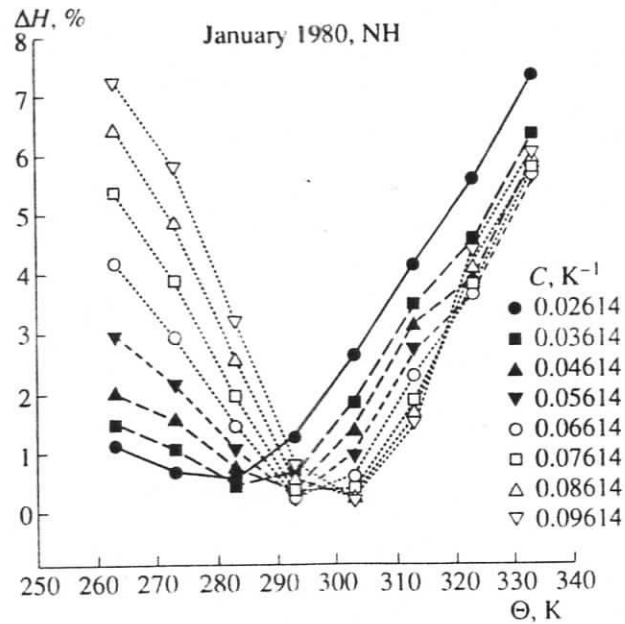


Рис. 1.

где  $f$  удовлетворяет требованиям

$$1) f = 0, \quad I_\chi = 0; \quad 2) \int_0^\infty f \mu_B dI_\chi = 0. \quad (5)$$

6. Мерой близости  $\mu$  и  $\mu_B$  является дефицит информационной энтропии

$$\Delta H_\chi = -\int_0^\infty \mu_B \ln \mu_B dI_\chi + \int_0^\infty \mu \ln \mu dI_\chi.$$

В квадратичном по  $v$  приближении с учетом (4), (5)

$$\Delta H_\chi \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{v^2}{\mu_B} dI_\chi \geq \frac{\tau^2}{2} Q_\chi^{-1} \int_0^\infty f^2 I_\chi^{-1} \mu_B dI_\chi,$$

и условие того, что  $\Delta H_\chi \rightarrow 0$  при  $\chi \rightarrow \chi_0$ , заключает в себе аналогичное условие для функционала  $\Phi\{\chi\}$  из п. 2.

7. Были взяты данные ECMWF 1980–1989 гг. и рассчитаны поля потенциального вихря по методике, близкой к описанной в [7, 8]. Принималось, что

$$\chi(\vartheta) = -p^*(\vartheta)/g = -A + B \arctg[C(\vartheta - \Theta)]. \quad (6)$$

Это отвечает известному в статистике распределению Коши [10], которое обладает тем свойством, что среднееарифметическое случайных величин, распределенных по Коши, также распределено по Коши. Поэтому (6) удобно для построения нормировочной функции  $\frac{d\chi}{d\vartheta}$ , имеющей климатический смысл.

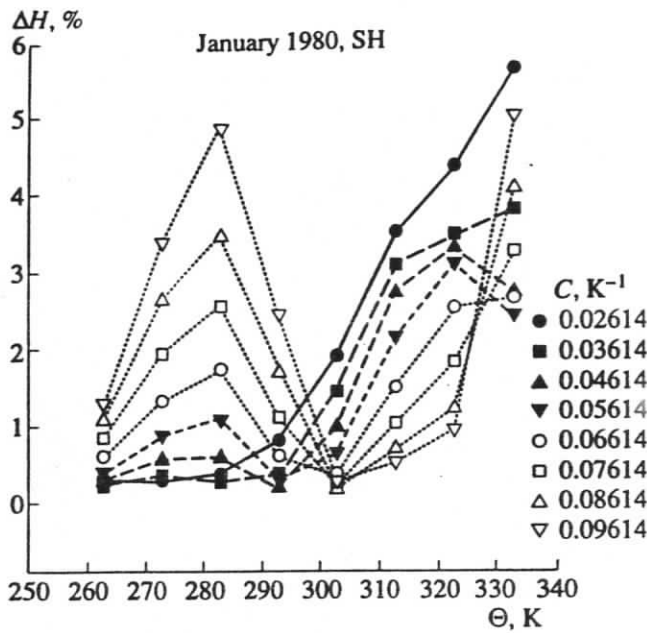


Рис. 2.

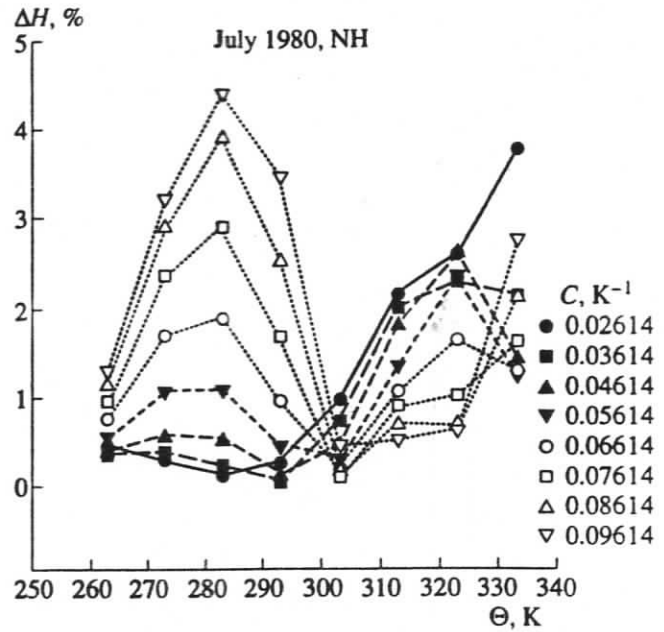


Рис. 3.

Средние за январь и июль 1980 г. фактические функции распределения  $\mu$  для каждого из полушарий по отдельности рассчитывались в виде таблиц из 19 чисел для 64 различных комбинаций параметров  $C$  и  $\Theta$  в (6) при  $B = +4335 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$  и  $A = (\pi/2)B$ . По методике [6] вычислялись  $\Delta H_x$ , затем они нормировались на  $\ln 19$  и выражались в процентах. Наглядное представление о зависимости  $\Delta H_x$  от  $\Theta$  и  $C$  дают рис. 1-4. Для всех четырех случаев характерен минимум  $\Delta H_x$  в полосе значений вблизи линейной зависимости

$$C - 0.05614 \approx 0.003(\Theta - 293).$$

Здесь  $\Delta H_x$  снижается на порядок по сравнению с окружающей областью и достигает долей процента. Тем самым получено однопараметрическое, определяемое  $\Theta$ , семейство возможных квазиравновесных состояний атмосферы. Отметим, что при  $\vartheta = \Theta$  разность сухоадиабатического  $\gamma_a$  и фактического  $\gamma(\vartheta)$  вертикальных температурных градиентов равняется

$$\gamma_a - \gamma = \gamma_a \frac{3.5\pi}{2} C^{-1} \Theta^{-1}.$$

Увеличение  $\Theta$ , т.е. относительное потепление (в том числе в годовом ходе), "сдвигает" равновесие в сторону повышенных значений  $C$ , одновременно понижая степень статической устойчивости атмосферы. Наличие единой для двух сезонов и обоих полушарий полосы минимума  $\Delta H_x$  позволяет использовать универсальную нормировочную функцию (6), когда, например,  $\Theta = 293 \text{ K}$  и  $C = 0.05614 \text{ K}^{-1}$  ( $\gamma_a - \gamma(\Theta) \approx 3.25 \text{ K/км}$ ), что соответ-

ствует среднеклиматическому состоянию атмосферы (ср. [7]).

8. В данном сообщении продемонстрированы лишь принципиальные возможности предложенного метода. В будущем необходимы более обширные расчеты, в том числе с использованием "пробных функций", выходящих за класс функций (6). Вместе с тем получено указание на существование функции  $\chi_0(\vartheta)$ , оптимизирующей понятие потенциального вихря, если речь идет о его

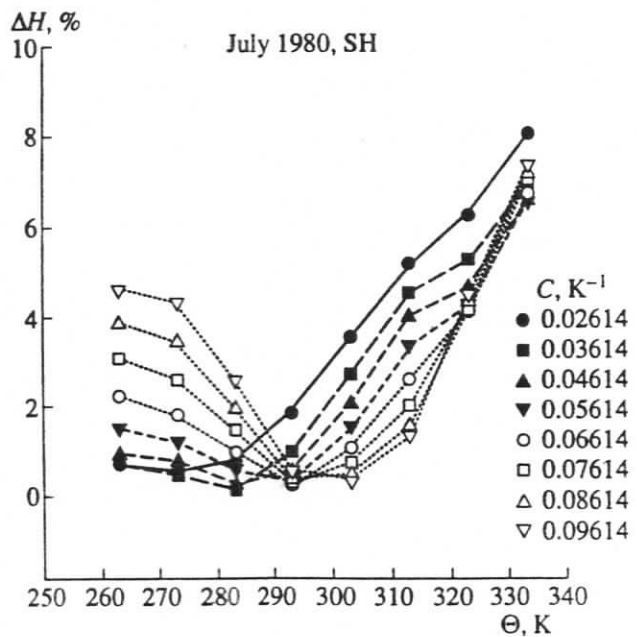


Рис. 4.

применении в теории климата. Одновременно решается задача нахождения состояния атмосферы с наиболее скомпенсированными внешними воздействиями.

Авторы благодарны Г.И. Марчуку, привлекая к их внимание к затронутой в работе проблеме.

Данная работа финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 96-05-64511. Один из нас (И.А.П.) благодарит СРТЕС/INPE (Бразилия) за предоставленные банки данных и компьютерные возможности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов А.М. // ДАН. 1962. Т. 145. № 6. С. 1239–1242.
2. Ertel H. // Meteorol. Z. 1942. Bd. 59. N. 9. S. 277–281.
3. Haynes P.H., McIntyre M.E. // J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. № 16. P. 2021–2031.
4. Lait L.R. // Ibid. 1994. V. 51. № 12. P. 1754–1759.
5. Обухов А.М. // Метеорология и гидрология. 1964. № 2. С. 3–9.
6. Курганский М.В., Приказчиков Д.С. // Изв. РАН. ФАО. 1994. Т. 30. № 6. С. 730–737.
7. Курганский М.В., Татарская М.С. // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23. № 8. С. 787–814.
8. Обухов А.М., Курганский М.В., Татарская М.С. // Метеорология и гидрология. 1988. № 8. С. 111–120.
9. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 556 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. 752 с.